Rekursive tallfølger

Det finnes bare én Idun ketchup…

B3.64 (Sigma S2, side 83)

Vi tar opp et lån på 200 000 kr til 6 % årlig rente.
Lånet blir tilbakebetalt med et fast årlig beløp på 30 000 kr,
første gang ett år etter at lånet er tatt opp.

a) Forklar at vi kan uttrykke restlånet $a_n = a_{n-1} \cdot 1{,}06 - 30\,000$ når $n \geq 2$
b) Finn restlånet rett etter sjuende innbetaling.

Løsningsforslag

a)

Det første året skal det betales 6 % renter på restlånet, $a_1 = 200\,000$ kr

$$200\,000 \text{ kr } \cdot 0{,}06 = 12\,000 \text{ kr}$$

Resten av terminbeløpet er avdrag

$$30\,000 \text{ kr} - 200\,000 \text{ kr } \cdot 0{,}06 = 18\,000 \text{ kr}$$

Det nye restlånet, a_2, blir da

$$a_2 = 200\,000 - 18\,000 = 200\,000 - (30\,000 - 200\,000 \cdot 0{,}06)$$
$$a_2 = 200\,000 - 30\,000 + 200\,000 \cdot 0{,}06 = 200\,000(1 + 0{,}06) - 30\,000$$
$$a_2 = 200\,000 \cdot 1{,}06 - 30\,000 = a_1 \cdot 1{,}06 - 30\,000$$

Neste år skal vi betale renter på a_2

$$a_3 = a_2 \cdot 1{,}06 - 30\,000$$

Slik fortsetter det

$$a_n = a_{n-1} \cdot 1{,}06 - 30\,000 \text{ når } n \geq 2$$

b)

Alternativ 1 Manuell utregning med bruk av kalkulator (CASIO fx-9860GII)

a_n	***Resultat***	***Tast inn på kalkulatoren***
a_1	$= 200\,000$	*200000 EXE*
a_2	$= 182\,000$	***Shift-Ans*****1.06-30000* ***EXE***
a_3	$= 162\,920$	***EXE***
a_4	$\approx 142\,695$	***EXE***
a_5	$\approx 121\,257$	***EXE***
a_6	$\approx 98\,532$	***EXE***
a_7	$\approx 74\,444$	***EXE***
a_8	$\approx \underline{\underline{48\,911}}$	***EXE***

Alternativ 2 Tilsvarende framgangsmåte, men med bruk av Excel

	A	B	C	D
1	n		Restlån	Formler
2		a1	200 000	200 000
3	2	a2	182 000	= C2*1,06 -30000
4	3	a3	162 920	= C3*1,06 -30000
5	4	a4	142 695	= C4*1,06 -30000
6	5	a5	121 257	= C5*1,06 -30000
7	6	a6	98 532	= C6*1,06 -30000
8	7	a7	74 444	= C7*1,06 -30000
9	8	a8	48 911	= C8*1,06 -30000

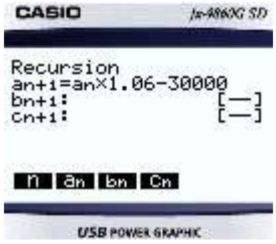
Det holder med å skrive formelen inn i C3, klikke og dra det nederste høyre hjørnet i cellen for å kopiere formelen nedover.

Alternativ 3 Bruk av RECUR meny på kalkulator (CASIO fx-9860GII)

1. Menu: RECUR

2. TYPE(F3): Velg F2

3. n, a_n(F4)



4. SET (F5)

5. SEL (F1)

6. TABL (F6)

Pass på at likhetstegnet er markert når du du bruker SEL

Alternativ 4 Bruk av formler

Etter sju år er verdien på lånet $200\,000 \cdot 1{,}06^7 = 300\,726{,}05$

Verdien av innbetalingen er $30\,000 \cdot \frac{1{,}06^7-1}{1{,}06-1} = 251\,815{,}13$ (Geometrisk rekke)

Restlånet blir $300\,726{,}05 - 251\,815{,}13 = \underline{\underline{48\,910{,}92}}$

Alternativ 5 Bruk av formler og funksjoner i Excel

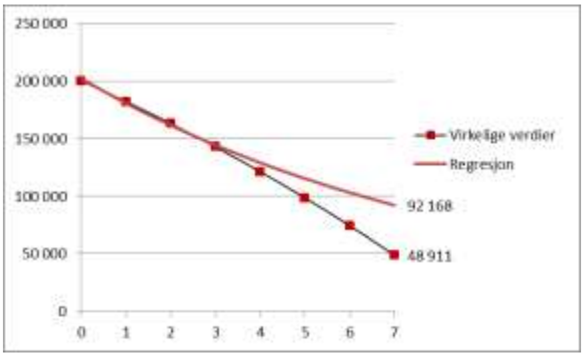
	A	B	C
1			Formler
2	Verdien på lånet	300 726,05	= 200000*1,06^7
3	Verdien på innbetalingene	-251 815,13	= SLUTTVERDI(0,06;7;30000;0;0)
4	Restlånet	48 910,92	=B2+B3

Alternativ 6 Bruk av TVM (Time Value of Money) meny på kalkulatoren (CASIO fx-9860GII):

1. Menu: TVM	2. Shift SET UP: **End**	3. F2: **Compound Interest**
		
4. Legg inn data	**5. Trykk F5 (FV)**	
		

Alternativ 7 Bruk av regresjon

Regresjonsverktøyene i Excel og på kalkulatoren (CASIO fx-9860GII) kommer til kort når vi prøver eksponentialregresjon i denne oppgaven. De takler ikke asymptote ulik null, og dersom vi forsøker de innebygde verktøyene på eksempelvis fire verdier, ender vi opp med en modell som nedenfor. Denne modellen er på formen $y = A \cdot B^X$. Her blir $a_n = 201867 \cdot 0{,}89404426^n$ og feilen på 88 % når n = 7. De virkelige verdiene følger imidlertid en modell $y = A \cdot B^X + C$ hvor A er negativ og B er større enn 1.

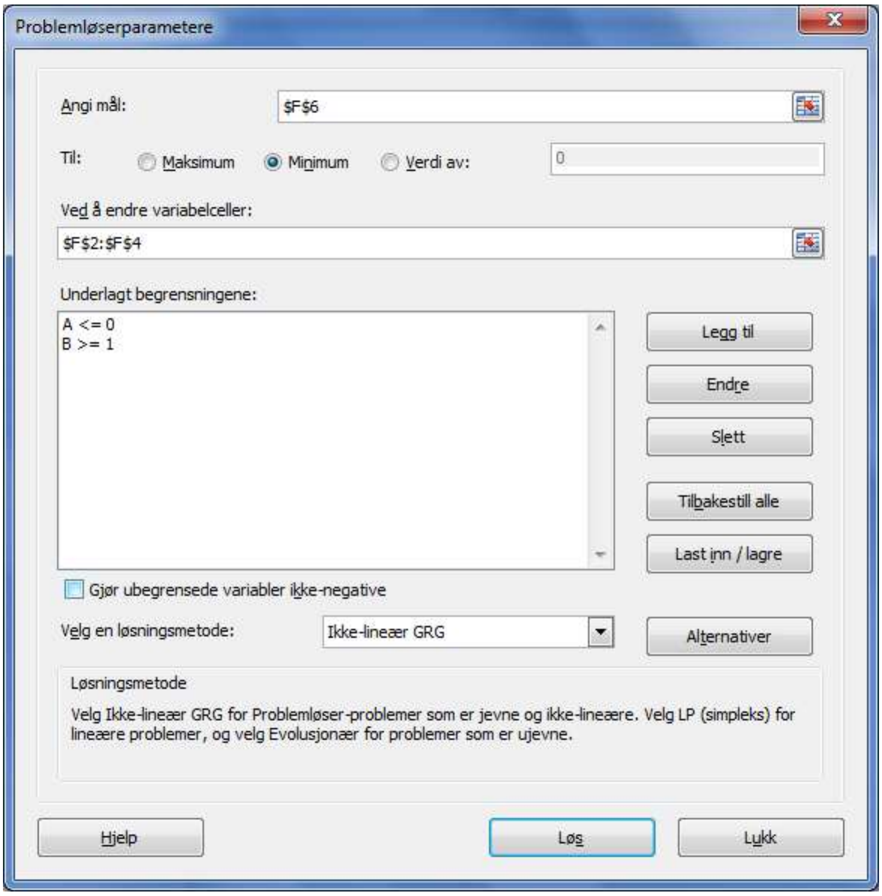


Vi kan imidlertid bruke vår egen modell og minimalisere summen av kvadratet til feilene med Problemløseren for å finne verdiene til A, B og C. Her har cellen F2 til F4 fått navnene A, B og C_. Startverdiene er satt til henholdsvis -100000, 1 og 100000. I celle F6 er =SUMMER((B2:B5-C2:C5)^2) lagt inn som en matriseformel ved å trykke **CTRL**+**SHIFT**+**ENTER**. Den vises da som {=SUMMER((B2:B5-C2:C5)^2)} på formellinjen.

	A	B	C	D	E	F
1	**X**	**Y**	**A*B^X + C**			
2	0	200000	=A*B^A2+C_		**A**	-100000
3	1	182000	=A*B^A3+C_		**B**	1
4	2	162920	=A*B^A4+C_		**C**	100000
5	3	142695,2	=A*B^A5+C_		Summen	
6					**SS**	=SUMMER((B2:B5-C2:C5)^2)

	A	B	C	D	E	F
1	**X**	**Y**	**A*B^X + C**			
2	0	200 000	0		**A**	-100 000
3	1	182 000	0		**B**	1,00
4	2	162 920	0		**C**	100 000
5	3	142 695	0		Summen av kvadratet til feilene:	
6					**SS**	120 028 846 503

Data → Problemløser gir oss vinduet under hvor vi angir at F6 skal minimeres ved å endre F2:F4. Begrensningene $A \leq 0 \; og \; B \geq 1$ er også tatt med:



Etter å ha justert nøyaktigheten under Alternativer, klikker vi Løs og ender vi opp med

	A	B	C	D	E	F
1	**X**	**Y**	**A*B^X + C**			
2	0	200 000	200 000		**A**	-300 000
3	1	182 000	182 000		**B**	1,06
4	2	162 920	162 920		**C**	500 000
5	3	142 695	142 695		Summen av kvadratet til feilene:	
6					**SS**	0

Altså er restlånet etter n innbetalinger:

$$a_n = -300\,000(1{,}06)^n + 500\,000$$

Vi setter n=7 og finner restlånet etter sjuende innbetalingen

$$a_7 = -300\,000 \cdot (1{,}06)^7 + 500\,000 \approx \underline{\underline{48\,911}}$$

Alternativ 8 To likninger med to ukjente

Dersom vi vet at alle punktene ligger på grafen til $Y = A \cdot 1{,}06^X + B$, kan vi sette inn to punkter og løse likningene:

$$1)\ 200000 = A \cdot 1{,}06^0 + B, gir\ B = 200000 - A$$
$$2)\ 182\,000 = A \cdot 1{,}06^1 + B$$

Vi setter inn 1) i 2) og får

$$3)\ 182\,000 = A \cdot 1{,}06^1 + 200000 - A$$
$$0{,}06A = 182000 - 200\,000 = -18000$$
$$A = \frac{-18000}{0{,}06} = -300000$$

Vi setter inn 3) i 1) og får

$$4)\ B = 200000 - (-300000) = 500000$$

Altså er restlånet etter n innbetalinger:

$$\mathrm{a_n} = -300\,000(1{,}06)^{\mathrm{n}} + 500\,000$$

Vi setter n=7 og finner restlånet etter sjuende innbetalingen

$$\mathrm{a_7} = -300\,000 \cdot (1{,}06)^7 + 500\,000 \approx \underline{\underline{48\,911}}$$

Alternativ 9 Løser differenslikningen (ikke pensum på videregående)

Skriver om likningen

$$\mathrm{a_{n+1}} - 1{,}06 \cdot \mathrm{a_n} = -30\,000\text{, hvor } \mathrm{a_0} = 200\,000 \text{ og } n \geq 0$$

Tipper på en partikulær løsning $a_n^p = A$

$$-30\,000 = a_{n+1}^p - 1{,}06 \cdot a_n^p = \mathrm{A} - 1{,}06\mathrm{A} = -0{,}06\mathrm{A}$$
$$A = \frac{-30\,000}{-0{,}06} = 500\,000$$

Den homogene løsningen er gitt ved

$$\mathrm{a_n^h} = \mathrm{C}(1{,}06)^{\mathrm{n}}$$

Så den generelle løsningen blir

$$\mathrm{a_n} = \mathrm{a_n^h} + \mathrm{a_n^p} = 500\,000 + \mathrm{C}(1{,}06)^{\mathrm{n}}$$

$\mathrm{a_0} = 200\,000$ så C er gitt ved

$$200\,000 = 500\,000 + \mathrm{C}(1{,}06)^0$$
$$C = \frac{200\,000 - 500\,000}{1} = -300\,000$$

Altså er restlånet etter n innbetalinger:

$$\mathrm{a_n} = 500\,000 - 300\,000(1{,}06)^{\mathrm{n}}$$

Vi setter n=7 og finner restlånet etter sjuende innbetalingen

$$\mathrm{a_7} = 500\,000 - 300\,000(1{,}06)^7 = \underline{\underline{48\,910{,}92}}$$

Alternativ 10 Bruk av z-transform (ikke pensum på videregående)

$$\mathrm{a}_{\mathrm{n}+1} = \mathrm{a}_{\mathrm{n}} \cdot 1{,}06 - 30\,000 \text{ , hvor } \mathrm{a}_0 = 200\,000 \text{ og } n \geq 0$$

Som z-transformeres til

$$\mathrm{z} \cdot \mathrm{A(z)} - \mathrm{z} \cdot 200\,000 = 1{,}06\,\mathrm{A(z)} - 30\,000 \cdot \frac{z}{z-1}$$

$$\mathrm{A(z)(z} - 1{,}06) = \mathrm{z} \cdot 200\,000 - 30\,000 \cdot \frac{z}{z-1}$$

$$\mathrm{A(z)} = 200\,000 \cdot \frac{z}{(\mathrm{z}-1{,}06)} - 30\,000 \cdot \mathrm{z} \cdot \frac{1}{(z-1)(\mathrm{z}-1{,}06)}$$

$$\mathrm{A(z)} = 200\,000 \cdot \frac{1}{(1-1{,}06z^{-1})} - 30\,000 \cdot \mathrm{z} \cdot \left(\frac{\frac{1}{-0{,}06}}{(z-1)} + \frac{\frac{1}{0{,}06}}{(\mathrm{z}-1{,}06)}\right)$$

$$\mathrm{A(z)} = 200\,000 \cdot \frac{1}{(1-1{,}06z^{-1})} + 500\,000 \cdot \frac{z}{(z-1)} - 500\,000 \frac{z}{(\mathrm{z}-1{,}06)}$$

$$\mathrm{A(z)} = (200\,000 - 500\,000) \cdot \frac{1}{(1-1{,}06z^{-1})} + 500\,000 \cdot \frac{1}{(1-z^{-1})}$$

$$\mathrm{A(z)} = -300\,000 \cdot \frac{1}{(1-1{,}06z^{-1})} + 500\,000 \cdot \frac{1}{(1-z^{-1})}$$

Som invers-transformeres til

$$\mathrm{a}_{\mathrm{n}} = -300\,000 \cdot (1{,}06)^n + 500\,000$$

Vi setter n=7 og finner restlånet etter sjuende innbetalingen

$$a_7 = -300\,000(1{,}06)^7 + 500\,000 = \underline{\underline{48\,910{,}92}}$$